

Eine Zeichnung als Ausgangspunkt für variierende Aufgabenstellungen –

Lösungsbeispiele zur Ermittlung des größtmöglichen Flächeninhalts des eingeschlossenen Rechtecks

Hinweis: Die ausführliche Beschreibung dieser Unterrichtseinheit ist in folgendem Buch zu finden: Unterrichtspraktische Beispiele mit CAS- & grafikfähigen Taschenrechnern - Einsatzmöglichkeiten des ClassPad II und des FX-CG20 im Mathematikunterricht

Kurzfassung des Inhalts:

Zu der vorgegebenen Zeichnung, bei dem eine Gerade mit den Koordinatenachsen ein Rechteck einschließt, sollen Schülerinnen und Schüler selbstständig mathematische Fragestellungen finden und versuchen diese zu beantworten. In dieser eActivity werden anhand des Beispiels, den größten Flächeninhalts des eingeschlossenen Rechtecks zu ermitteln, verschiedene Lösungswege (numerisch, graphisch, symbolisch) aufgezeigt.

Klassenstufe:

Die Unterrichtseinheit ist für die 10. Jahrgangsstufe gedacht. Teile der Aufgabe können schon früher behandelt werden, wenn der Umgang mit linearen Funktionen bekannt ist.

Lernziele:

Die Schülerinnen und Schüler

- ... formulieren selbstständig Fragestellungen zu der gegebenen (dynamisierten) Zeichnung;
- ... lösen ihre selbstständig entwickelten Fragestellungen mithilfe des ClassPad auf unterschiedliche Arten;
- ... bearbeiten und lösen Extremwertaufgaben auf unterschiedlichen Ebenen

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

Die Schülerinnen und Schüler können

- ... Zeichnungen und Animationen mithilfe des ClassPad erstellen (bei Verwendung der fertigen eActivity nicht nötig);
- ... die Werte, die während einer Animation gemessen werden, tabellarisch sowie graphisch darstellen;
- ... mithilfe des ClassPad Gleichungssysteme lösen;

Hinweise/ Mehrwert des ClassPad-Einsatzes:

Durch Animationen mithilfe des ClassPad können Zeichnungen dynamisiert werden. Des Weiteren können Werte automatisch gemessen werden, die sich beim Ablaufen der Animation verändern. Diese können dann in einer Tabelle angezeigt und graphisch dargestellt werden. Durch den Einsatz des ClassPad erweitern sich die Lösungsmöglichkeiten für Problemstellungen.

Zeitbedarf:

Zwei Doppelstunden, wenn anschließend noch Variationsmöglichkeiten betrachtet werden, ansonsten höchstens eine Doppelstunde.

Sonstige Materialien:

Die eActivity „Zeichnung“ oder die im Geometrie-Anwendungsdatenfeld gespeicherte Zeichnung (Dateiname: „Rechteck“) können verwendet werden.

Literatur:

Brown, S. I., Walter, M. I.: The art of problem posing. Philadelphia, Pa., Franklin Inst. Press 1983.

Griesel, G., Postel, H., Suhr, F.: Elemente der Mathematik 11. Einführung in die Analysis. 4. Auflage. Schroedel Verlag, Hannover 2005.

Götz, H. u. a.: Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien 11. 1. Auflage. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2009.

Schupp, H.: Thema mit Variationen oder Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Franzbecker, Hildesheim 2002.

Unterrichtsorganisation

Die Schülerinnen und Schüler erhalten die eActivity „Zeichnung“ oder ein Arbeitsblatt mit der Darstellung (Abb. 1). (Hinweis: Es könnte im eActivity-Menü auch ein Geometrie-Anwendungsdatenfeld geöffnet werden und nach dem Klicken in das Zeichenfeld die gespeicherte Zeichnung „Rechteck“ geöffnet werden.) Der Arbeitsauftrag dazu lautet: Welche Fragestellungen fallen dir zu dieser Zeichnung ein?

Die Fragestellungen, die die Schülerinnen und Schüler formuliert haben, können im Plenum in passende Kategorien geordnet werden. In Gruppenarbeit können dann verschiedene Fragestellungen bearbeitet werden. Die Gruppen sollen dazu angeregt werden, neben einer Lösung auch möglichst alternative Lösungswege zu finden. Außerdem sollen sie sich auch weiterführende Fragen zu der Zeichnung überlegen.

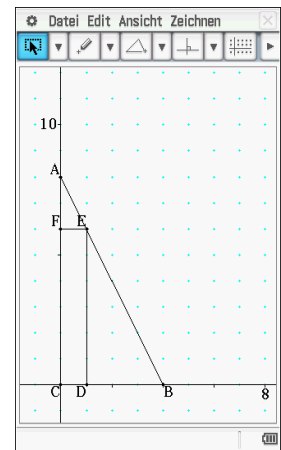




Abbildung 1



Beispiel: Aufgabe zur Extremwertberechnung

Der Punkt E bewegt sich auf der Strecke \overline{AB} : Für welche Koordinaten von E ist der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ am größten und welchen Wert hat der größte Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$?

Numerische Lösung

Es wird ein weiteres Geometrie-Anwendungsdatenfeld  eingefügt, in das Zeichenfeld geklickt und die gespeicherte Zeichnung mit dem Dateinamen „Rechteck“ geöffnet. Während der Animation, bei der sich der Punkt E auf der Strecke \overline{AB} bewegt, können die Koordinaten von E an der jeweiligen Position sowie der zugehörige Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ automatisch erfasst werden. Abbildung 2 zeigt Ausschnitte der Messungen, die durch Auswählen des jeweils zu messenden Objektes und Verwenden der -Taste (rechts neben dem Messfeld) angezeigt werden. Die erste (x -Wert) und zweite (y -Wert) Spalte zeigen die jeweiligen Koordinaten des Punktes E . In der dritten Spalte wird der jeweils zu der Position des Punktes E zugehörige Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ dargestellt. Je mehr Animationsschritte (bis 100) eingestellt werden, desto besser wird der Näherungswert.

Graphische Lösung

Es wird ein Tabellenkalkulations-Anwendungsdatenfeld  eingefügt. Die gemessenen Werte werden dorthin kopiert und es wird eine Streuungsgraphik  aus diesen Werten erzeugt (Abb. 3). Es ergibt sich eine nach unten geöffnete Parabel. Ein Näherungswert für den größten Flächeninhalt und der zugehörige x -Wert des Punktes E können angezeigt werden, indem im Graphikfenster der Scheitelpunkt des Graphen ausgewählt wird.

x	y	Fläche
8.94E-15	8	7.16E-17
0.040404	7.919192	0.31996
0.080808	7.838384	0.63340
0.121212	7.757576	0.94031
1.858586	4.282828	7.96000
1.898990	4.202020	7.97959
1.939394	4.121212	7.99265
1.979798	4.040404	7.99918
2.020202	3.959596	7.99918
2.060606	3.878788	7.99265
2.101010	3.797980	7.97959
2.141414	3.717172	7.96000
3.838384	0.323232	1.24069
3.878788	0.242424	0.94031
3.919192	0.161616	0.63340
3.959596	0.080808	0.31996
4	7.2E-14	2.88E-13

Abbildung 2

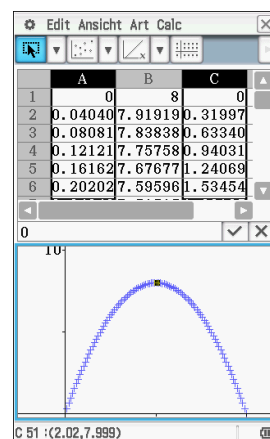




Abbildung 3

Symbolische Lösung

Der größte Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ kann auch symbolisch berechnet werden. Dafür werden die Gleichung für die Gerade, auf der die Strecke \overline{AB} liegt: $g(x) = -2 \cdot x + 8$ (Abb. 4) und die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Rechtecks $CDEF$ aufgestellt. Der Flächeninhalt des Rechtecks ist das Produkt des jeweiligen x -Wertes von D bzw. E (entspricht der Länge der Strecke \overline{CD} bzw. \overline{FE}) und dem jeweiligen y -Wert von F bzw. E (entspricht Länge der Strecke \overline{CF} bzw. \overline{DE}). Daher ist der Flächeninhalt des Rechtecks: $A(x) = x \cdot y$. Für y kann $g(x) = -2 \cdot x + 8$ eingesetzt werden: $A(x) = x \cdot (-2 \cdot x + 8) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$.

Kombination der symbolischen mit der graphischen Ermittlung des Maximums

Zunächst wird der Graph der Funktion A mit $A(x) = -2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$ gezeichnet  und das Maximum  angezeigt (Abb. 4). Dann wird der zugehörige y -Wert zu $x = 2$ ermittelt: $g(2) = -2 \cdot 2 + 8 = 4$ bzw. kann abgelesen werden.

Der Flächeninhalt des Rechtecks $CDEF$ ist am größten, wenn $E = (2|4)$ ist.

Das Rechteck $CDEF$ besitzt in diesem Fall den größten Flächeninhalt (Abb. 2 bis 4), wenn die Seite \overline{CD} des Rechtecks $CDEF$ halb so lang ist wie die Seite \overline{CB} des Dreiecks ABC und die Seite \overline{CF} des Rechtecks $CDEF$ halb so lang wie die Seite \overline{CA} des Dreiecks ABC ist.

Als Anschlussaufgabe wäre es denkbar, zu untersuchen, ob der Flächeninhalt eines von einer Gerade und den Koordinatenachsen eingeschlossenen Rechtecks immer am größten ist, wenn dies gilt.

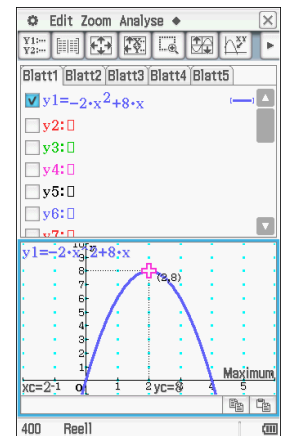


Abbildung 4

Ausblick

Anschließend könnten die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, Veränderungen der gegebenen Situation zu finden. Hinweise dazu sind in der Datenbank zu dem Thema „Eine Zeichnung als Ausgangspunkt für variierende Aufgabenstellungen – Beispielhafte Variationsmöglichkeiten“ zu finden.