Schmiegekreis einer Kurve

Arnold Zitterbart

Schwarzwald-Gymnasium Triberg

Kurzfassung des Inhalts:

Zu einem vorgegebenen Punkt eines Funktionsgraphen werden mithilfe von Normalen Mittelpunkt und Radius des Kreises bestimmt, der sich optimal an dieser Stelle an den Graphen anschmiegt

Klassenstufe: Kursstufe

Lernziele:

- Bedeutung der Normalen in einem Punkt des Funktionsgraphen
- Gleichung der Normalen
- Grenzwertprozess
- Abstand zweier Punkte in der Koordinatenebene

Vorkenntnisse bezüglich der Bedienung des Graphikrechners:

- Definition von Funktionen
- Erstellen der Normalen mit dem normal-Befehl
- Lösen von Gleichungen mit dem solve-Befehl
- Grenzwertbildung mit dem lim-Befehl
- Darstellung von Funktionsgraphen
- Zeichenwerkzeuge

Mehrwert des ClassPad-Einsatzes:

leichte Visualisierung des Grenzprozesses

Zeitbedarf:

- 2 Unterrichtsstunden für die Erarbeitung,
- 2 weitere Stunden für Übung und Weiterführung der Thematik

Aufgabe

An den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ soll ein Kreis gelegt werden, der sich bei $x = 1{,}5$ optimal an den Graphen anschmiegt.

Verstehen der Aufgabe

Zunächst versuchen die S“ mit dem ClassPad durch Versuch und Irrtum nach Augenmaß einen Kreis zu finden, der sich in einem vorgegebenen Kurvenpunkt optimal an den Graphen anschmiegt.
Mit Analyse/Skizze wird zunächst ein Punkt eingezeichnet, der als Mittelpunkt des gesuchten Kreises geeignet erscheint. Der Radius wird als Abstand des gewählten Mittelpunktes zum Kurvenpunkt berechnet und der Kreis gezeichnet.

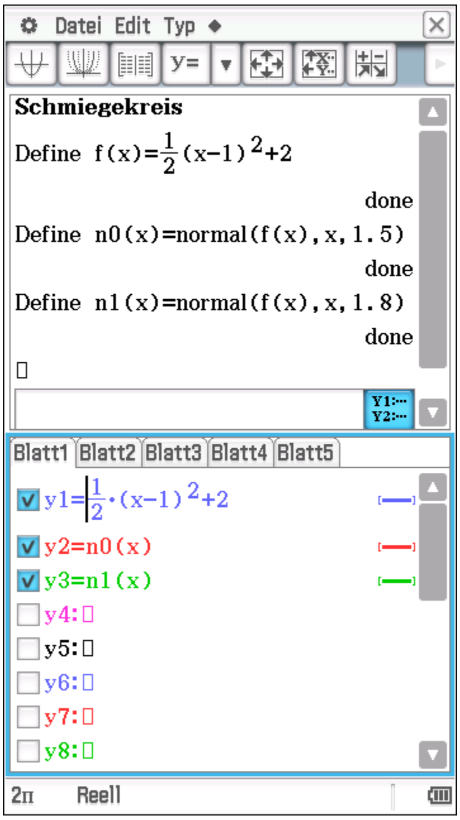
Erarbeitung

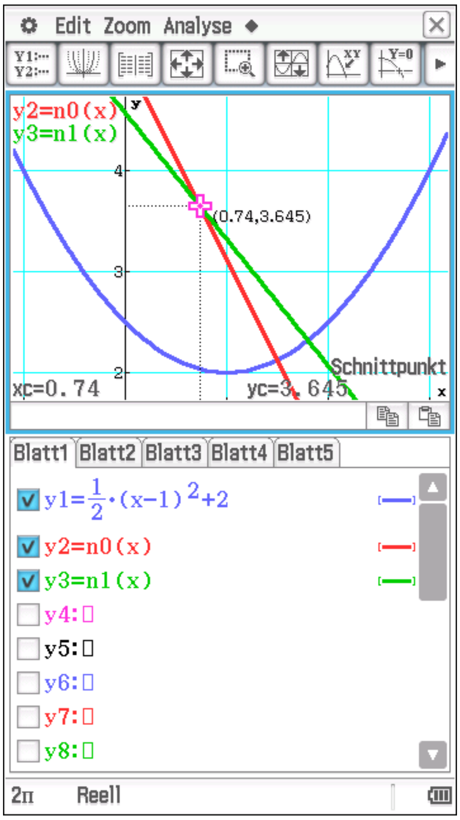
Lässt man die S“ auch noch den entsprechenden Radius als Strecke einzeichnen, wird schnell deutlich, dass dieser Radius orthogonal auf dem Funktionsgraphen stehen muss, also Teil der entsprechenden Normalen sein muss.
Im Unterrichtsgespräch kann dann erarbeitet werden, wie mithilfe einer weiteren Normalen, die „in unmittelbarer Nähe“ der schon gezeichneten Normalen liegt, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises näherungsweise bestimmt werden kann.

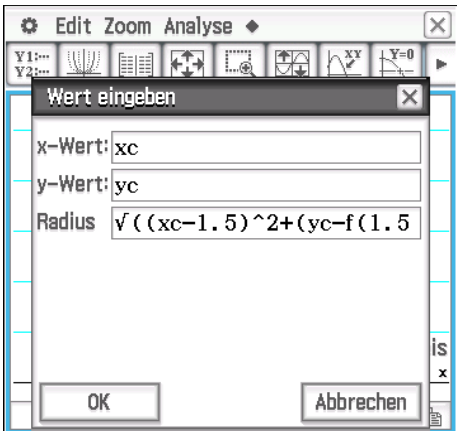
Lösungsidee

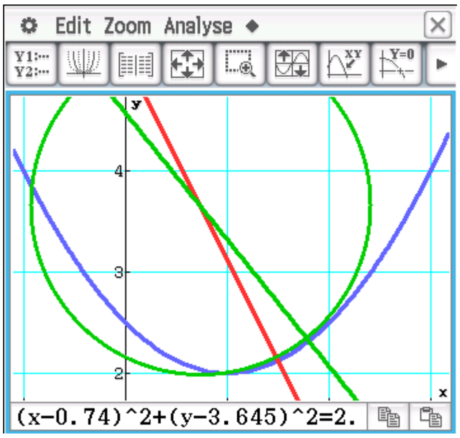
Bei einem Kreis gehen alle Normalen durch den Mittelpunkt. Weil sich der Kreis bei $x = 1{,}5$ optimal an den Graphen anschmiegt, liegt der Mittelpunkt des Schmiegekreises auf der Normalen bei $x = 1{,}5$.
Da der Schmiegekreis auch in unmittelbarer Nähe von $x = 1{,}5$ sehr gut mit dem Graphen übereinstimmt, liegt der Mittelpunkt wenigstens näherungsweise auch auf den Normalen, die nahe bei $x = 1{,}5$ gelegt werden.
Der Mittelpunkt des Schnittkreises ist daher näherungsweise der Schnittpunkt der Normalen bei $x = 1{,}5$ und einer weiteren Normale, die in der Nähe von $x = 1{,}5$ gelegt wird.

Bem.: Wenn der normal-Befehl nicht zur Verfügung steht, bestimmt man die Normale an der Stelle u mit der Formel $na(x) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a) + f(a)$.





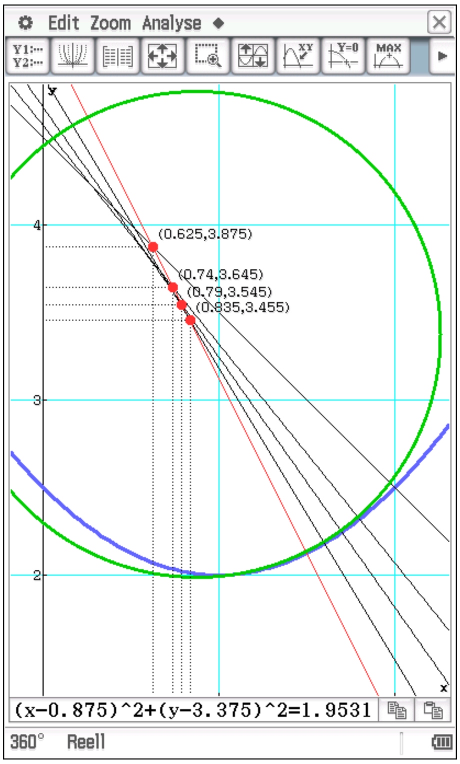


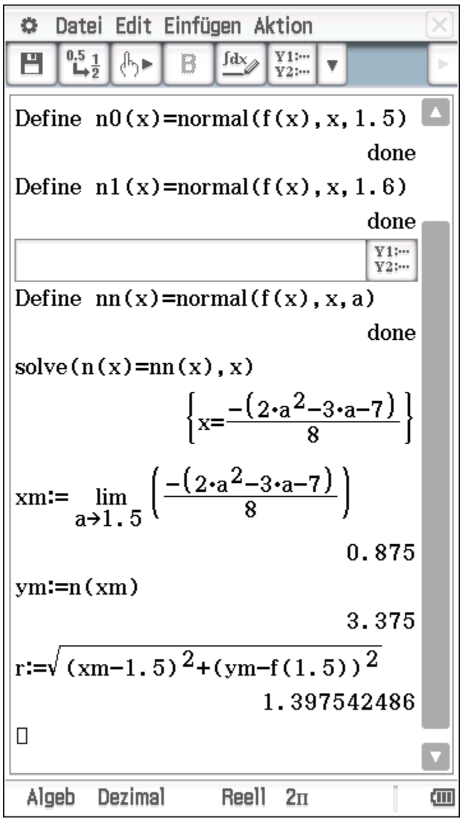


Die Näherung wird umso besser sein, je näher bei $x = 1{,}5$ diese Normale gelegt wird.

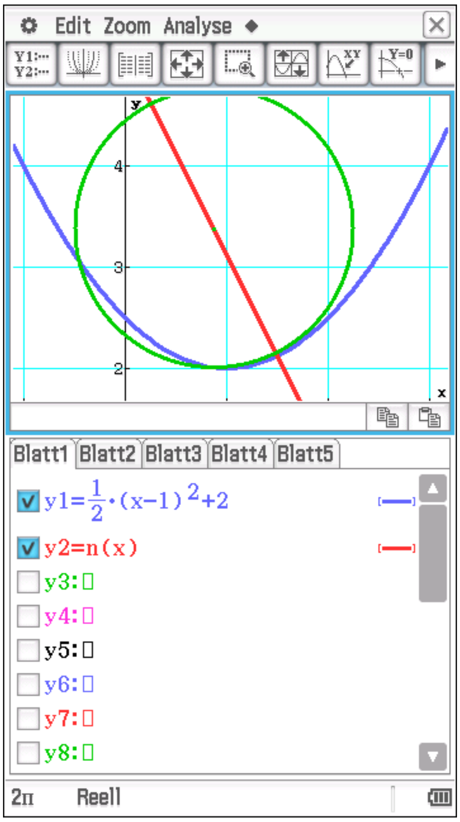
Mit dem ClassPad kann visualisiert werden, wie sich der Schnittpunkt der Normalen dabei verändert. Dazu gibt man weitere Normalen in den Funktioneneditor ein und bestimmt mit der graphischen Analyse den entsprechenden Schnittpunkt (folgende Abbildung links).

Im Algebra-Screen kann mithilfe des limes-Befehls die Grenzlage des Normalenschnittpunktes bestimmt werden. Dies ist dann der Mittelpunkt des Schmiegekreises (folgende Abbildung rechts).
Den Radius erhält man als Abstand des Mittelpunktes zu dem betreffenden Punkt des Graphen.





Zeichnen des Schmiegekreises mithilfe von Analyse/Skizze/Kreis und …/Punkt



Übungsaufgabe

a) Bestimmen Sie analog Mittelpunkt und Radius des Schmiegekreises für $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{5} \cdot x^3 - \frac{2}{5} \cdot x^2 - \mathrm{x} + \frac{6}{5}$ an der Stelle $x = 2$.

b) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Schmiegekreise in den Extrempunkten.